INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CONSTANȚA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 18 februarie 2012

Clasa a IX a

Subiectul 1

Fie $x, y > 0$, astfel încât $x + y = \frac{1}{2}$. Arătați că $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{3x+y}}\right) \in [\,1, \sqrt{2}\,)$.

Prof. Gabriela Constantinescu

Subiectul 2

Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât ecuația $\{nx\} - \{x\} = x$ să aibă exact 2012 soluții reale. ($\{a\}$ este partea fracționară a lui a)

Prof. Cătălin Zîrnă

Subiectul 3

Fie $f: \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+, f(x) = \frac{[x]}{\{x\}+1}$. Arătați că $Imf = \mathbb{Q}_+ \setminus (0, \frac{1}{2}]$. ($Imf = \{f(x) | x \in \mathbb{Q}_+\}$)

Prof. Dorin Arventiev

Subiectul 4

Fie $ABCDE$ pentagon convex; H_1 ortocentrul triunghiului ABC; H_2 ortocentrul triunghiului ADE; P_1 simetricul lui A față de mijlocul segmentului $[BC]$ şi P_2 simetricul lui A față de mijlocul segmentului $[DE]$. Demonstrați echivalența: $ABCDE$ este inscriptibil $\Leftrightarrow$ $H_1P_1P_2H_2$ este paralelogram.

Prof. Nelu Chichirim

Notă:
Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7. Nu se acordă puncte din oficiu.